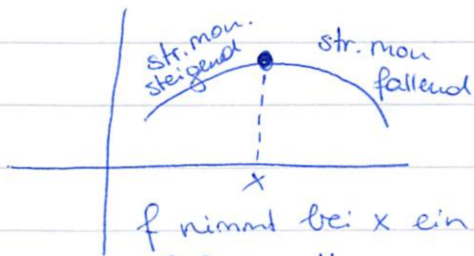
28.5.18

1

- Falls f stetig auf D ist
  Existenz von globalen Extrema ist garantiert falls $D = [a, b]$

  Existenz und Berechnung von Extrema:
  zeichne den Graphen von f
  (Monotonie –"– nach Def.)

  in den anderen Fällen, d.h. $D \neq [a, b]$



f nimmt bei x ein lokales Max. an

- Falls f diff.bar ist auf D, dann

  (i) mögliche Extrema erfüllen $f'(x) = 0$, x liegt im Inneren des Definitionsbereichs
  (d.h. $D = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$
  oder $D = [a, b]$, $x \in (a, b)$)

  (ii) Monotonie wird mithilfe von f' überprüft
  (iii) Konvexität –"– f'' –"–
  (iv) Bestimmung von lokalen Minima, Maxima mithilfe von f''

BRUNNEN

Existenz Berechnung von f'' von globalen Extrema:
zeichne den Graphen von f

4.8 (Satz) sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff.bar auf (a,b).
Dann ist f

(i) $\left(\text{monoton wachsend auf } [a,b]\right) \iff \left(f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)\right)$

(ii) $\left(\text{streng monoton wachsend auf } [a,b]\right) \iff \left(f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)\right)$

(iii) $\left(\text{monoton fallend}\right) \iff \left(f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)\right)$

(iv) $\left(\text{streng mon. fallend}\right) \iff \left(f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)\right)$

BW von (ii)

Def.: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend auf $[a,b]$, falls

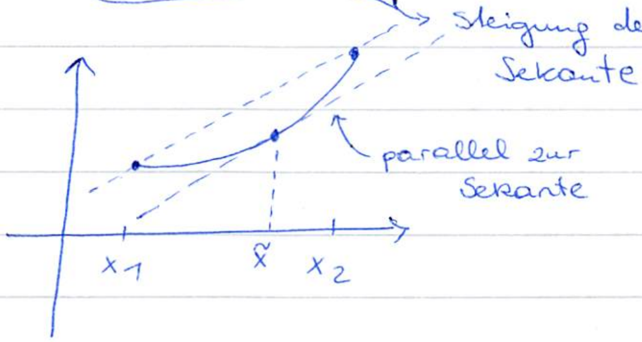
$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Es gilt $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$

Wähle x_1, x_2 so dass $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

Mittelwertsatz für Ableitungen besagt

$$\exists \tilde{x} \in (x_1, x_2) : \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}} = \overbrace{f'(\tilde{x})}^{\text{Steigung d. Tangente}} > 0$$



$$f(x_1 - x_2) = \underbrace{f(\tilde{x})}_{> 0} \cdot \underbrace{(x_1 - x_2)}_{< 0} < 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \qquad \blacksquare$$

<u>Bsp.</u> f streng monoton wachsend auf $[a, b]$

$$\not\Rightarrow$$

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$f(x) = x^3$, $x = [-1, 1]$

ist streng monoton wachsend auf $[-1, 1]$

denn

$$\forall x_1, x_2 \in [-1, 1] : x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{f(x_1) < f(x_2)}_{\text{nach Def. von } f}$$

$$f(x_1) = x_1^3 = \underbrace{x_1}_{< x_2} \cdot \underbrace{x_1}_{< x_2} \cdot \underbrace{x_1}_{< x_2} < x_2^3 = f(x_2)$$

aber $f'(x) = 3x^2$ und

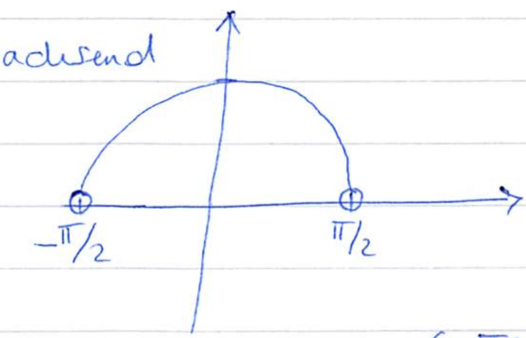
$f'(0) = 0 \not> 0$

<u>Bsp.</u>

(i) Monotonie mit Satz 4.8
für $f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$

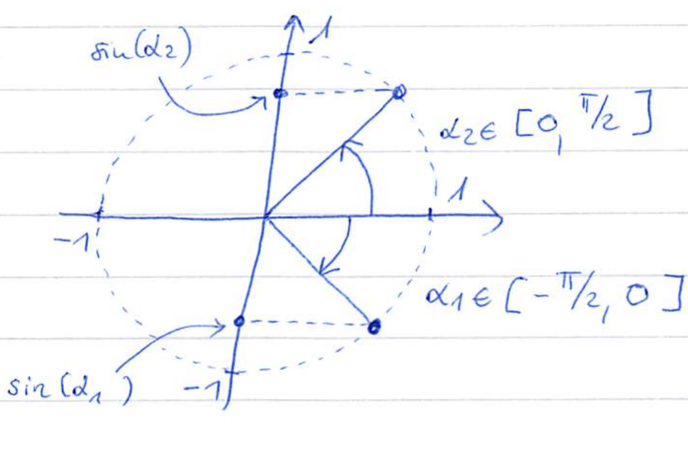
Es gilt: $f'(x) = \cos(x)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ und

$\underset{4.8}{\Longrightarrow}$ f ist str. mon. wachsend



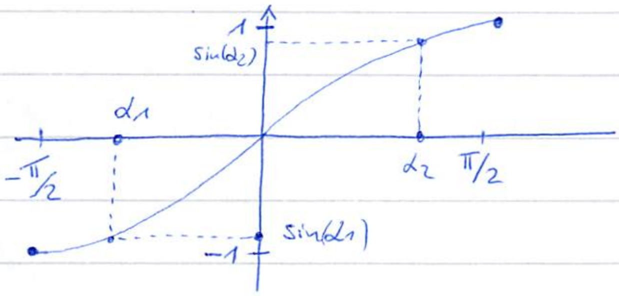
$\cos(x) > 0$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$

(ii) Monotonie nach Def.



Für $\alpha_1 < \alpha_2$: $\sin(\alpha_1) < \sin(\alpha_2)$

Graph von $\sin(x)$



4.9 (Def: konvex, konkav)

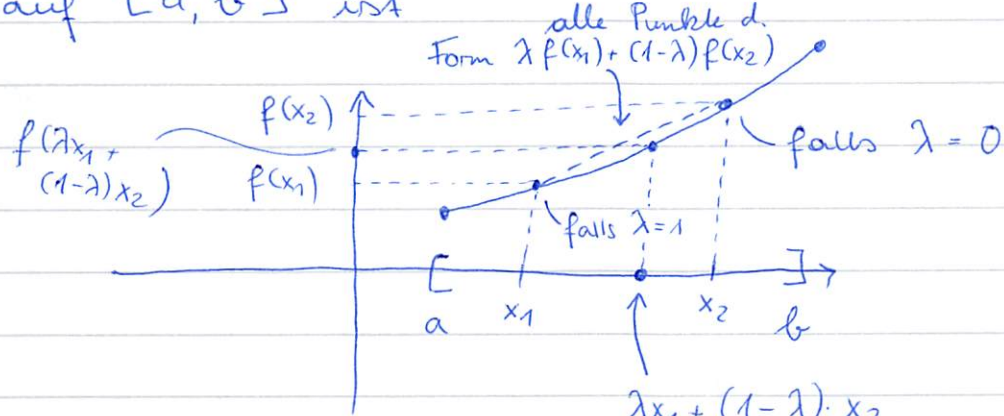
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, falls

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$

dann heißt f konvex auf $[a,b]$

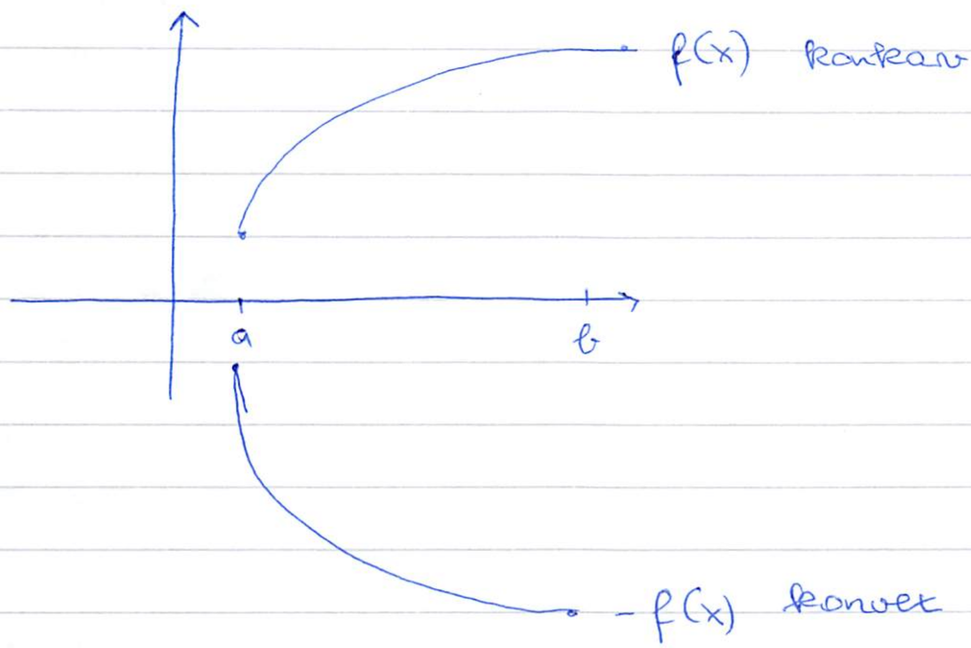
f heißt konkav auf $[a,b]$, falls $-f$ konvex auf $[a,b]$ ist



$\lambda = 0$ sind wir bei x_2

$\lambda = 1$ sind wir bei x_1

Konvex: Für jede Strecke, die zwei Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ verbindet, liegt der Graph von f unterhalb dieser Strecke



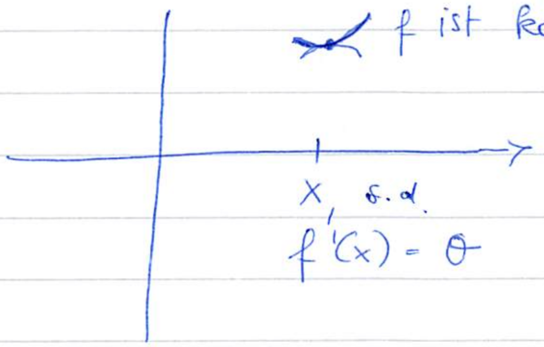
4.10 (Satz) (Konvexität via f'')

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar auf (a,b)

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ konvex} \\ \text{auf } [a,b] \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \right)$$

Bw (Satz 6.30, Sauer)

Beispiel:



f ist konvex auf $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

lokales Min bei X

X, s.d. $f'(x) = 0$

d.h. lokales Minimum bei x: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

4.11 Satz (lokale Min, Max)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff.bar auf (a, b)

$$\begin{pmatrix} f'(x) = 0 \text{ und} \\ f''(x) > 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f \text{ besitzt an der Stelle } x \text{ ein lok. Min,} \\ \text{d.h. } \exists \varepsilon > 0 : \forall x' \in [a, b] \setminus \{x\} : \\ |x - x'| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x') \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} f'(x) = 0 \text{ und} \\ f''(x) < 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f \text{ -"- ein lokales} \\ \text{Max} \end{pmatrix}$$

BW wegen

$$f''(x) \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{\tilde{x} \to x} \frac{f'(\tilde{x}) - f'(x)}{\tilde{x} - x} > 0$$

$\Rightarrow$ da f'' stetig (d.h. f'' ändert sich "langsam") d.h. $\exists \varepsilon > 0 : \underbrace{\forall \tilde{x} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)}_{|x - \tilde{x}| < \varepsilon}$

$$\frac{f'(\tilde{x}) - f'(x)}{\tilde{x} - x} > 0$$

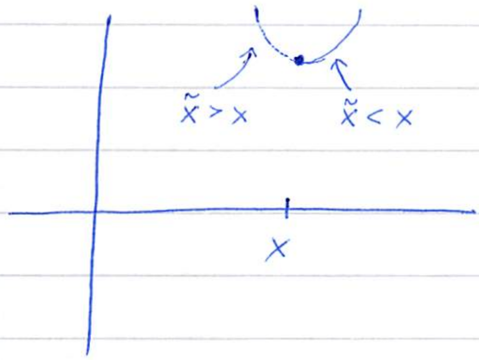
Da $f'(x) = 0$, gilt

$$\frac{f'(\tilde{x})}{\tilde{x} - x} > 0 \quad \forall \tilde{x} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

$\tilde{x} \neq x$

Also

$$\underbrace{(f'(\tilde{x}) > 0,\ \tilde{x} > x)}_{f \text{ ist str. mon. wachsend für } \tilde{x} > x} \veebar \underbrace{(f'(\tilde{x}) < 0,\ \tilde{x} < x)}_{f \text{ ist str. mon. fallend } \forall \text{ für } \tilde{x} < x}$$



$\Rightarrow$ f nimmt an Stelle x ein lokales Min. an

Nullstellen v. Funktionen

4.12 (Satz): Mittelwertsatz für Funktionen
Alg. zur Berechnung von Nullstellen stetiger Funktionen

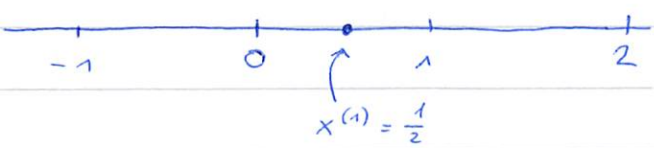
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$)
Dann existiert $x \in (a,b)$, s.d. $f(x) = 0$

Beweisidee: $f(x) = x$, $x \in [-1, 2]$

$f(-1) = -1 < 0$, $f(2) = 2 > 0$

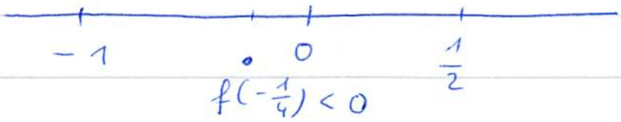
1. Schritt: Wähle $x^{(1)} = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}$

• $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$



Ersetze $[a,b]$ durch $[a, x^{(1)}]$ (denn $f(-1) < 0$, $f(\frac{1}{2}) > 0$)

<u>2. Schritt</u> Wähle $x^{(2)} = \underbrace{\frac{-1 + x^{(1)}}{2}}_{\substack{\text{Mittelpunkt} \\ \text{v. } [-1, \frac{1}{2}]}} = \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$



Ersetze $[-1, \frac{1}{2})$ durch $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$

(denn $f(-\frac{1}{4}) < 0$ und $f(\frac{1}{2}) > 0$)

⋮

Ergebnis: Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ $n \in \mathbb{N}$, mit Eigenschaften

$a_n <$ Nullstelle, $\lim_{n \to \infty} a_n =$ Nullstelle $(= A)$

$f(a_n) < 0$

$b_n >$ Nullstelle $(= A)$, $\lim_{n \to \infty} b_n =$ Nullstelle

$f(b_n) > 0$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = A = \lim_{n \to \infty} b_n$

und f stetig

$\Rightarrow \lim \underbrace{f(a_n)}_{< 0} = f(A) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{f(b_n)}_{> 0} > 0$

$\Rightarrow \quad 0 > f(A) > 0 \iff f(A) = 0$

Für unser Bsp.

$[a_1, b_1] = [-1, 2]$

$[a_2, b_2] = [-1, 1/2]$

$[a_3, b_3] = [-1/4, 1/2]$

$[a_4, b_4] = [-1/4, \underbrace{1/8}_{f(1/8) > 0}]$

$[a_5, b_5] = [-1/16, 1/8]$

$\Rightarrow$ Nullstelle

$-\frac{1}{16} < A = 0 < \frac{1}{8}$

- Stetigkeit
- verschiedene Vorzeichen

weitere Schritte führen zu einer besseren Näherung für A

<u>Korollar</u> 7. Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f: [a, b] \to [f(a), f(b)]$ surjektiv.

<u>Bsp.</u> Existenz v. Umkehrfunktionen

- $f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend (d.h. injektiv und stetig (surjektiv als $f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1 = \sin(-\pi/2), 1 = \sin(\pi/2)]$)

$\Rightarrow$ es existiert die Umkehrabbildung

- $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$ streng monoton wachsend (d.h. injektiv) und stetig (surjektiv als $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$)

$\Rightarrow$ es existiert die Umkehrabbildung

$(\sqrt{x} : [0,\infty) \to [0,\infty))$

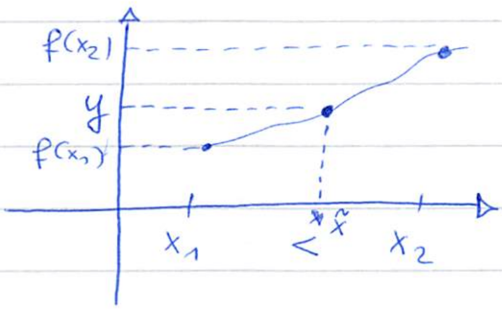
<u>BW</u> (von Korollar)

$\forall y \in [f(x_1), f(x_2)] \quad \exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]:$
$f(\tilde{x}) = y$

$x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ surjektiv

Def. $g(x) = f(x) - y$, $x \in [x_1, x_2]$

z.z. $g(\tilde{x}) = 0$
$\Rightarrow f(\tilde{x}) = y$



$$\underbrace{f(x_1) - y}_{\leq 0} = g(x_1)$$

$\leq 0 \leq f(x_2) - y = g(x_2)$

$f(x_1) \leq y$

28.5
12

1. Fall $f(x_1) - y = 0 \Rightarrow$ Wähle $\tilde{x} = x_1$

2. Fall $f(x_2) - y = 0 \Rightarrow$ Wähle $\tilde{x} = x_2$

3. Fall $(f(x_1) - y = 0) \wedge (f(x_2 - y) = 0)$

$\Rightarrow$ Wähle $(\tilde{x} = x_1) \vee (\tilde{x} = x_2)$

4. Fall $g(x_1) = f(x_1) - y < 0 < f(x_2) - y = g(x_2)$

(d.h. $g(x_1) < 0$ und $g(x_2) > 0$)

$$\underset{4.12}{\Longrightarrow} \exists\, \tilde{x} \in (x_1, x_2) : g(\tilde{x}) = 0 = f(\tilde{x}) - y$$

$\blacksquare$